Uch fazali ferrorezonansli zanjirlarda subgarmonik tebranishlarning qo‘zg‘alish jarayonini tadqiq qilish

Muxtarxan I. Ibadullayev

DSc, prof., Toshkent davlat texnika universiteti, Toshkent, 100095, O‘zbekiston; ibodullayevmuxtorxon@tdtu.uz ; https://orcid.org/0000-0002-9258-2970

Dolzarbligi: elektr tarmoqlaridagi ferrorezonans hodisalari, xususan, yuqori kuchlanishli tarmoqlarda subgarmonik tebranishlarning (SGT) yuzaga kelishi avariya holatlari, o‘ta kuchlanishlar va elektr jihozlarining shikastlanishiga sabab bo‘lmoqda. Uch fazali ferrorezonansli zanjirlarda SGTni tahlil qilish nazariyasini rivojlantirish va ularning matematik modellarini ishlab chiqish elektr tarmoqlari va tizimlarining ishonchliligini oshirish, samarali himoya apparaturasini yaratish, shuningdek, ferrorezonans hodisalari asosida ikkilamchi energiya manbalari va chastota bo‘lgichlarini ishlab chiqish uchun zarur.
Maqsad: elementlari parallel ulangan uch fazali ferrorezonansli zanjirda ikkinchi tartibli (ω/2) subgarmonik tebranishlarning qo‘zg‘alish mexanizmini tadqiq qilish hamda ushbu tebranishlar yuzaga keladigan va barqaror mavjud bo‘ladigan zanjir parametrlari sohasini aniqlash.
Usullari: Kirxgof qonunlari asosida zanjirning nochiziqli integro-differensial tenglamalar tizimini matritsa shaklida tuzish, ferromagnit elementning veber-amper tavsifini kubik polinom bilan approksimatsiyalash, tenglamalarni o‘lchamsiz vaqtga keltirish, Kardano formulasi yordamida yechish va MATLAB muhitida kompyuter modellashtirish.
Natijalar: uch fazali ferrorezonansli zanjirning matematik modeli va soddalashtirilgan hisoblash algoritmi ishlab chiqildi; ω/2 chastotali SGT boshlang‘ich shartlarga bog‘liq bo‘lmagan holda fazalari 120° ga simmetrik siljigan holda «yumshoq» qo‘zg‘alishi hamda zanjir parametrlari va kirish kuchlanishining chegaralangan sohasida mavjud bo‘lishi aniqlandi. Natijalardan elektr ta’minoti tizimlarida yuzaga keladigan avtoparametrik tebranishlarni bartaraf etishda va uch fazali ferrorezonansli chastota bo‘lgichlarini loyihalashda foydalanish mumkin.
Kalit so‘zlar: ferrorezonans, avtoparametrik tebranishlar, subgarmonika, uch fazali zanjir, approksimatsiya, matritsa, yumshoq qo‘zg‘alish, ferromagnit element, Kardano formulasi, ossillogramma.

For citation: Ibadullaev M.I. Study of the Excitation Process of Subharmonic Oscillations in Three-Phase Ferro Resonant Circuits. Scientific and technical journal of Problems of Energy and Sources Saving, 2026, no. 3 (1), pp. 201-206.
https://doi.org/10.5281/zenodo.24214614

Received: 18.04.2026
Revised: 11.05.2026
Accepted: 16.06.2026
Published: 19.10.2026

Copyright: © Mukhtarkhan I. Ibadullaev, 2026. Submitted to Problems of Energy and Sources Saving for possible open access publication under the terms and conditions of the Creative Commons Attri- bution (CC BY) license (https:// creativecommons.org/licenses/by/ 4.0/).

Исследование процесса возбуждения субгармонических колебаний в трехфазных феррорезонансных цепях

Мухтархан И. Ибадуллаев

DSc, проф., Ташкентский государственный технический университет, Ташкент, 100095, Узбекистан; ibodullayevmuxtorxon@tdtu.uz; https://orcid.org/0000-0002-9258-2970

Актуальность: феррорезонансные явления в электрических сетях, в частности возникновение субгармонических колебаний (СГК) в сетях высокого напряжения, остаются одной из причин аварийных ситуаций, перенапряжений и повреждения электрооборудования. Развитие теории анализа СГК в трехфазных феррорезонансных цепях и разработка их математических моделей необходимы для повышения надежности работы электрических сетей и систем, создания эффективной защитной аппаратуры, а также для разработки устройств на основе феррорезонансных явлений, в том числе вторичных источников питания и делителей частоты.
Цель: исследование механизма возбуждения субгармонических колебаний второго порядка (ω/2) в трехфазной феррорезонансной цепи с параллельно соединенными элементами и определение области параметров цепи, при которых эти колебания возникают и устойчиво существуют.
Методы: составление системы нелинейных интегро-дифференциальных уравнений цепи в матричной форме на основе законов Кирхгофа с кубической аппроксимацией вебер-амперной характеристики ферромагнитного элемента; приведение уравнений к безразмерному времени; решение с использованием формулы Кардано; компьютерное моделирование в среде MATLAB.
Результаты: разработаны математическая модель и упрощенный алгоритм расчета трехфазной феррорезонансной цепи; установлено, что СГК с частотой ω/2 возбуждаются «мягко» с симметричным сдвигом фаз на 120° независимо от начальных условий и существуют в ограниченной области значений параметров цепи и входного напряжения. Результаты могут быть использованы при анализе феррорезонансных процессов в системах электроснабжения и при проектировании трехфазных феррорезонансных делителей частоты.
Ключевые слова: феррорезонанс, автопараметрические колебания, субгармоника, трехфазная цепь, аппроксимация, матрица, мягкое возбуждение, ферромагнитный элемент, формула Кардано, осциллограмма.

Study of the Excitation Process of Subharmonic Oscillations in Three-Phase Ferro Resonant Circuits

Mukhtarkhan I. Ibadullaev

DSc, prof., Tashkent State Technical University, Tashkent, 100095, Uzbekistan; ibodullayevmuxtorx-on@tdtu.uz; https://orcid.org/0000-0002-9258-2970

Relevance: ferroresonance phenomena in electrical networks, in particular the occurrence of subharmonic oscillations (SHO) in high-voltage networks, remain one of the causes of emergencies, overvoltages and damage to electrical equipment. Developing the theory of SHO analysis in three-phase ferroresonant circuits and their mathematical models is necessary to improve the reliability of electrical networks and systems, to create effective protective equipment, and to develop devices based on ferroresonance phenomena, including secondary power sources and frequency dividers.
Aim: to study the excitation mechanism of second-order (ω/2) subharmonic oscillations in a three-phase ferroresonant circuit with parallel-connected elements and to determine the range of circuit parameters within which these oscillations arise and exist stably.
Methods: formulation of the system of nonlinear integro-differential equations of the circuit in matrix form based on Kirchhoff's laws with a cubic approximation of the weber-ampere characteristic of the ferromagnetic element; reduction of the equations to dimensionless time; solution using Cardano's formula; computer simulation in MATLAB.
Results: a mathematical model and a simplified calculation algorithm for a three-phase ferroresonant circuit have been developed; it has been established that ω/2 SHO are excited "softly" with a symmetrical phase shift of 120° regardless of the initial conditions and exist within a limited range of circuit parameters and input voltage. The results can be used in the analysis of ferroresonance processes in power supply systems and in the design of three-phase ferroresonant frequency dividers.
Keywords: ferroresonance, autoparametric oscillations, subharmonic, three-phase circuit, approximation, matrix, soft excitation, ferromagnetic element, Cardano's formula, oscillogram.

1. Введение (Introduction)

Феррорезонанс представляет собой нелинейное резонансное явление, оказывающее негативное воздействие на работу электрических сетей, и до настоящего времени остается не до конца решенной проблемой электроэнергетических систем. Значительное повышение уровня высших гармоник, перенапряжения и сверхтоки, вызываемые феррорезонансом, нередко приводят к повреждению электроэнергетического оборудования. Многие аварии в энергосистемах, классифицируемые как происходящие «по невыясненным причинам», обусловлены именно этим нелинейным явлением [1, 3–5, 7, 9, 11].

Феррорезонансные колебания могут возникать на основной частоте, на высших гармониках и на субгармонических частотах; во всех случаях они представляют собой опасную аварийную ситуацию. Опыт эксплуатации показывает, что колебания на субгармонической частоте возникают при однофазных коротких замыканиях, обрывах линий, замыканиях на землю, включениях и других коммутациях [4, 5, 9]. Вместе с тем субгармонические колебания, целенаправленно возбуждаемые в специально спроектированных цепях, находят полезное применение: на их основе создаются феррорезонансные делители частоты и вторичные источники питания [2, 6].

Теоретические основы анализа колебаний в нелинейных электрических цепях изложены в работах [2, 10, 11], вопросы автопараметрического возбуждения электромагнитных цепей и общая теория анализа СГК в трехфазных феррорезонансных цепях и системах рассмотрены в [1, 3, 7]. Однако механизм возбуждения СГК в трехфазных цепях с параллельно соединенными элементами в зависимости от параметров цепи и фазы включения входного напряжения изучен недостаточно.

Целью настоящей работы является исследование процесса возбуждения СГК второго порядка (с частотой $\omega/2$) в трехфазной феррорезонансной цепи с параллельно соединенными элементами методом математического моделирования и определение области параметров, при которых эти колебания возникают.

2. Методы и материалы (Methods and materials)

Рассмотрим трехфазную феррорезонансную цепь, в каждой фазе которой последовательно с линейным резистором R включен параллельный контур, образованный конденсатором C и нелинейным ферромагнитным элементом (катушкой со стальным сердечником). Общая точка контуров соединена с нейтралью источника через резистор R_0 (рис. 1).

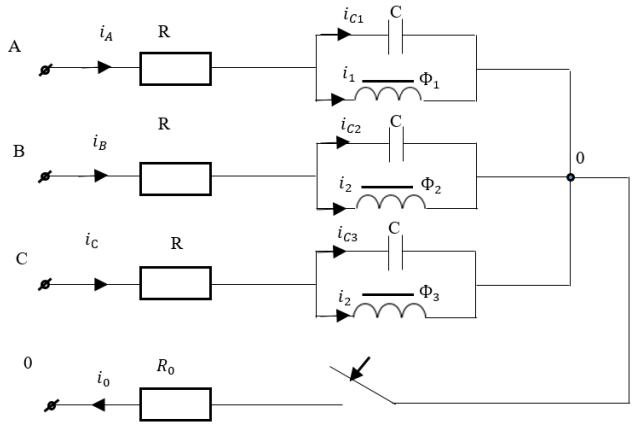


Рис. 1. Трехфазная феррорезонансная цепь с параллельно соединенными элементами
Fig. 1. Three-phase ferroresonant circuit with parallel-connected elements.

Процессы в такой цепи описываются системой интегро-дифференциальных уравнений, которую в соответствии со вторым законом Кирхгофа удобно записать в матричной форме:

$$u_\nu = R' i_\nu + A\dot{\Phi}_\nu + R_0 i_0, \tag{1}$$

где R', A, R_0 – специальные квадратные матрицы порядка ν (ν – число фаз):

$$R' = \begin{bmatrix} R_1 & 0 & 0 \\ 0 & R_2 & 0 \\ 0 & 0 & R_3 \end{bmatrix}; \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad R_0 = \begin{bmatrix} R_0 & 0 & 0 \\ 0 & R_0 & 0 \\ 0 & 0 & R_0 \end{bmatrix}.$$

Учитывая, что напряжение на параллельном контуре фазы равно $d\Phi_\nu/dt$, ток конденсатора $i_{C\nu} = C\, d^2\Phi_\nu/dt^2$, а ток нулевого провода определяется суммой фазных токов, после преобразований уравнения (1) получим обобщенную систему уравнений:

$$RC\frac{d^2\Phi_\nu}{dt^2} + \frac{d\Phi_\nu}{dt} + Ri_\nu + R_0\sum_{n=1}^{3} i_n + R_0 C\sum_{n=1}^{3}\frac{d^2\Phi_n}{dt^2} = U_m \cos\left[\omega t + \varphi - \frac{2\pi(\nu-1)}{3}\right], \tag{2}$$

где U_m – амплитуда входного напряжения; φ – фаза включения; $\nu = 1{,}2{,}3$ – номер фазы.

Вебер-амперную характеристику ферромагнитного элемента аппроксимируем кубическим полиномом:

$$i_\nu = \alpha\Phi_\nu + \beta\Phi_\nu^3, \tag{3}$$

где α, β – коэффициенты аппроксимации.

Подставив (3) в систему (2) и разделив левую и правую части на RC, получим систему нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка:

$$\begin{aligned} \frac{d^2\Phi_\nu}{dt^2} + \frac{1}{RC}\frac{d\Phi_\nu}{dt} + \frac{R_0}{R}\sum_{n=1}^{3}\frac{d^2\Phi_n}{dt^2} + \frac{R_0\alpha}{RC}\sum_{n=1}^{3}\Phi_n + \frac{R_0\beta}{RC}\sum_{n=1}^{3}\Phi_n^3 + \\ + \frac{\alpha}{C}\Phi_\nu + \frac{\beta}{C}\Phi_\nu^3 = \frac{U_m}{RC}\cos\left[\omega t + \varphi - \frac{2\pi(\nu-1)}{3}\right]. \end{aligned} \tag{4}$$

Сформированная система (4) позволяет исследовать процессы возбуждения автопараметрических колебаний различной частоты в установившихся и переходных режимах симметричных трехфазных феррорезонансных цепей. Для изучения процесса возбуждения СГК второго порядка, а также характера протекания переходного и установившегося режимов в зависимости от начальных условий и параметров цепи система (4) решалась методом математического моделирования.

Для анализа колебаний с частотой $\omega/2$ введем безразмерное время τ, положив $\omega t = 2\tau$, т. е. $t = 2\tau/\omega$. Тогда $d/dt = (\omega/2)\, d/d\tau$, $d^2/dt^2 = (\omega^2/4)\, d^2/d\tau^2$, и после умножения обеих частей (4) на $4/\omega^2$ система приводится к виду:

$$\begin{aligned} \frac{d^2\Phi_\nu}{d\tau^2} + \frac{2}{\omega RC}\frac{d\Phi_\nu}{d\tau} + \frac{R_0}{R}\sum_{n=1}^{3}\frac{d^2\Phi_n}{d\tau^2} + \\ + \frac{4R_0\alpha}{\omega^2 RC}\sum_{n=1}^{3}\Phi_n + \frac{4R_0\beta}{\omega^2 RC}\sum_{n=1}^{3}\Phi_n^3 + \frac{4\alpha}{\omega^2 C}\Phi_\nu + \frac{4\beta}{\omega^2 C}\Phi_\nu^3 = \\ = \frac{4U_m}{\omega^2 RC}\cos\left[2\tau + \varphi - \frac{2\pi(\nu-1)}{3}\right], \quad \nu = 1{,}2{,}3. \end{aligned} \tag{5}$$

Полагая в соответствии с принятыми начальными условиями производные магнитного

потока равными нулю (квазистатическое приближение) и учитывая, что в симметричном режиме слагаемые, обусловленные током нулевого провода, малы, получим систему алгебраических уравнений:

$$\frac{4\alpha}{\omega^2 C}\Phi_\nu + \frac{4\beta}{\omega^2 C}\Phi_\nu^3 = \frac{4U_m}{\omega^2 RC}\cos\theta_\nu, \qquad \theta_\nu = 2\tau + \varphi - \frac{2\pi(\nu-1)}{3}, \tag{6}$$

где для фаз $\nu = 1,2,3$ фазовый сдвиг составляет соответственно 0°, 120° и 240°.

Умножив обе части (6) на $\omega^2 C/(4\beta)$, приведем уравнения к каноническому виду кубического уравнения:

$$\Phi_\nu^3 + \frac{\alpha}{\beta}\Phi_\nu - \frac{U_m}{R\beta}\cos\theta_\nu = 0. \tag{7}$$

Поскольку $\alpha/\beta > 0$, дискриминант уравнения (7) положителен и оно имеет единственный действительный корень, который определяется по формуле Кардано [8]:

$$\Phi_\nu = \sqrt[3]{a_\nu + \sqrt{a_\nu^2 + \frac{\alpha^3}{27\beta^3}}} - \frac{\alpha}{3\beta\sqrt[3]{a_\nu + \sqrt{a_\nu^2 + \frac{\alpha^3}{27\beta^3}}}}, \qquad a_\nu = \frac{U_m}{2R\beta}\cos\theta_\nu. \tag{8}$$

Выражение (8) положено в основу упрощенного алгоритма расчета, реализованного в среде MATLAB: при заданных параметрах цепи и входного напряжения на каждом шаге по времени вычисляются мгновенные значения магнитных потоков Φ_1, Φ_2, Φ_3 трех фаз, а пошаговое изменение параметров позволяет исследовать переходный процесс и определить область существования СГК.

3. Результаты и обсуждение (Results and discussion)

На рис. 2 приведены осциллограммы магнитных потоков в установившемся режиме СГК с частотой $\omega/2$, полученные при $U_m = 170$ В; $C = 60$ мкФ; $R = 25$ Ом; $R_0 = 10$ Ом; $\alpha = 1{,}0$; $\beta = 0{,}4$; $\omega = 314{,}16$ с$^{-1}$. Как следует из осциллограмм, в трехфазной цепи с параллельно соединенными элементами (с продольной емкостной компенсацией) возникают устойчивые СГК $\omega/2$ с симметричным сдвигом фаз.

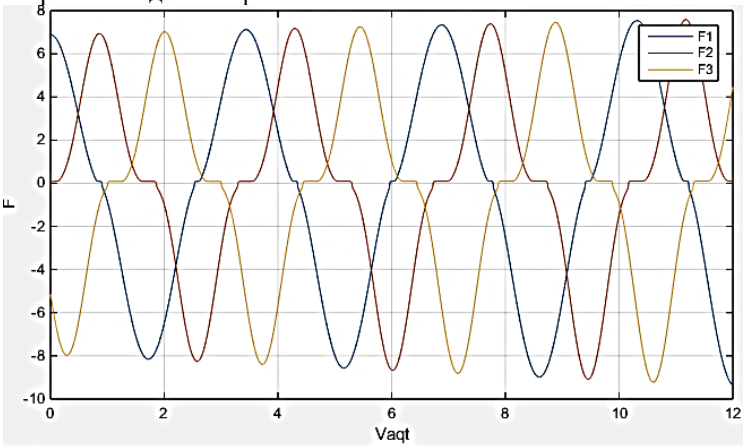


Рис. 2. Установившийся режим СГК с частотой ω/2 (F1, F2, F3 – магнитные потоки Φ₁, Φ₂, Φ₃ фаз; по оси абсцисс – время)

Fig. 2. Steady-state operation of the FRC at a frequency of ω/2 (F₁, F₂, F₃ – magnetic fluxes Φ₁, Φ₂, Φ₃ of the phases; the horizontal axis represents time).

Результаты моделирования показывают, что независимо от начальных условий в трехфазной феррорезонансной цепи с параллельно соединенными элементами СГК $\omega/2$ возбуждаются с симметричным сдвигом фаз на 120°. Характер переходного процесса возбуждения СГК представлен на рис. 3: амплитуда колебаний плавно нарастает, что свойственно режиму мягкого возбуждения.

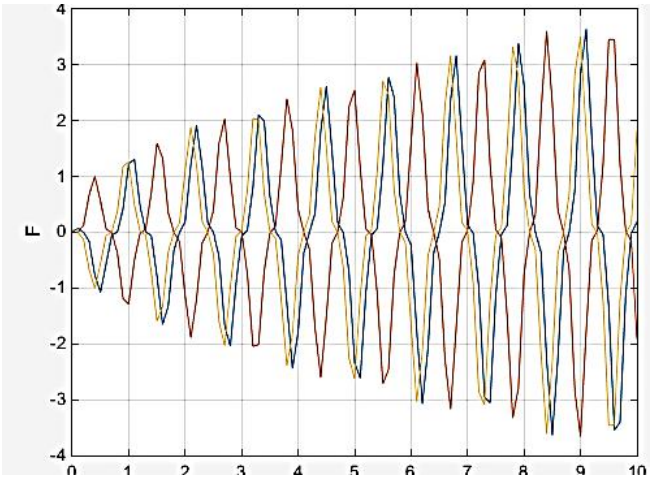


Рис. 3. Процесс возбуждения СГК с частотой ω/2
Fig. 3. Excitation process of the FRC at a frequency of ω/2.

Обобщение результатов расчетов при $\varphi = 30°$ позволило установить область параметров цепи, при которых генерируются субгармонические колебания второго порядка (табл. 1).

Таблица 1. Область параметров трехфазной феррорезонансной цепи, при которых возбуждаются СГК ω/2
Table 1. Range of three-phase ferroresonant circuit parameters for excitation of ω/2 subharmonic oscillations

Параметр	Обозначение	Ед. изм.	Область значений
Амплитуда входного напряжения	U_m	В	50 ÷ 150
Емкость конденсатора	C	мкФ	40 ÷ 160
Сопротивление резистора фазы	R	Ом	0 ÷ 25
Сопротивление в цепи нулевого провода	R_0	Ом	0 ÷ 20
Коэффициент аппроксимации	α	–	0,8 ÷ 1,8
Коэффициент аппроксимации	β	–	0,2 ÷ 1,0
Угловая частота сети	ω	$с^{-1}$	314,16
Фаза включения напряжения	φ	град	30

Результаты математического моделирования и экспериментальных исследований показывают, что СГК $\omega/2$ в симметричных трехфазных электроферромагнитных цепях могут возникать «мягко» при определенных соотношениях параметров цепи и приложенного напряжения и существуют лишь в ограниченной области значений параметров, границы которой определяются их критическими значениями. Указанные свойства трехфазной феррорезонансной цепи позволили создать трехфазный феррорезонансный делитель частоты в два раза с самоподмагничиванием [6].

С практической точки зрения полученные результаты позволяют, с одной стороны, выявлять в системах электроснабжения сочетания параметров, опасные с точки зрения возникновения автопараметрических СГК, и принимать меры по их предотвращению, а с другой – целенаправленно использовать эффект субгармонического резонанса при проектировании феррорезонансных делителей частоты.

4. Заключение (Conclusion)

На основании проведенных исследований можно сделать следующие выводы.

1. Разработана математическая модель для анализа механизма возбуждения СГК $(\omega/2)$ в трехфазных феррорезонансных цепях с параллельно соединенными элементами, основанная на решении системы нелинейных дифференциальных уравнений.

2. Путем преобразования системы трехфазных нелинейных дифференциальных уравнений к кубическим уравнениям, решаемым по формуле Кардано, создан упрощенный алгоритм расчета.

3. Установлено, что СГК $\omega/2$ возбуждаются «мягко» с симметричным сдвигом фаз на 120° независимо от начальных условий.

4. Установлено, что СГК существуют при определенных значениях параметров цепи и входного напряжения, а область их существования ограничивается критическими значениями параметров.

5. Результаты исследований могут быть использованы при анализе феррорезонансных

колебаний в системах электроснабжения и при проектировании трехфазных феррорезонансных делителей частоты.

ЛИТЕРАТУРА

1. Товбоев А.Н., Ибодуллаев М., Есенбеков А.К. К общей теории анализа субгармонических колебаний в трехфазных феррорезонансных цепях и системах // Электричество. – 2021. – № 11. – С. 22–35.

2. Бладыко В.М., Горбарук В.Н. Аналитический расчет последовательной феррорезонансной цепи в режиме возбуждения третьей субгармоники // Известия вузов. Энергетика. – 1970. – № 8. – С. 21–26.

3. Каримов А.С., Ибодуллаев М.И., Шойматов Б.Х., Товбаев А.Н. Энергетические циклы при автопараметрическом возбуждении электромагнитных цепей цепочечного соединения // Проблемы информатики и энергетики. – Ташкент, 2000. – № 5. – С. 19–23.

4. Perez J. Understanding sub-harmonics. – Winnipeg: ERL Phase Power Technologies, 2014. – 13 p.

5. Зилес Л.Д. О природе феррорезонанса в электрических цепях // Электричество. – 2012. – № 1. – С. 59–63.

6. Товбаев А.Н., Ибодуллаев М.И. Трехфазный феррорезонансный делитель частоты с самоподмагничиванием: патент РУз № FAP 01894. – 29.03.2022.

7. Ibadullaev M., Tovbaev A.N. Research of ferroresonance oscillations at the frequency of sub-harmonics in three-phase non-linear electric circuits and systems // Rudenko International Conference on Methodological Problems in Reliability Study of Large Energy Systems (RSES 2020), Kazan, 21–26 September 2020. E3S Web of Conferences. – 2020. – Vol. 216.

8. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. – М.: Наука, 1984. – С. 520.

9. Масленников В.А., Устинов С.М. Низкочастотные системные колебания и устойчивость объединенных энергосистем // Энергетика. – М., 2001. – № 4. – С. 69–75.

10. Бессонов Л.А. Теоретические основы электротехники. Электрические цепи. – 11-е изд. – М.: Гардарики, 2007. – 701 с.

11. Ивашев В.И. Колебания в нелинейных электрических системах. – Ташкент: Фан, 1967. – 171 с.

REFERENCES

1. Tovboev A.N., Ibodullaev M., Esenbekov A.K. On the general theory for analysis of subharmonic oscillations in three-phase ferroresonance circuits and systems. Elektrichestvo, 2021, no. 11, pp. 22–35. (In Russ.)

2. Bladyko V.M., Gorbaruk V.N. Analytical calculation of a series ferroresonant circuit in the mode of third subharmonic excitation. Izvestiya vuzov. Energetika, 1970, no. 8, pp. 21–26. (In Russ.)

3. Karimov A.S., Ibodullaev M.I., Shoymatov B.Kh., Tovbaev A.N. Energy cycles during autoparametric excitation of chain-connected electromagnetic circuits. Problemy informatiki i energetiki, Tashkent, 2000, no. 5, pp. 19–23. (In Russ.)

4. Perez J. Understanding sub-harmonics. Winnipeg, ERL Phase Power Technologies, 2014. 13 p.

5. Ziles L.D. On the nature of ferroresonance in electrical circuits. Elektrichestvo, 2012, no. 1, pp. 59–63. (In Russ.)

6. Tovbaev A.N., Ibodullaev M.I. Three-phase ferroresonant frequency divider with self-magnetization. Patent RUz no. FAP 01894, 29.03.2022.

7. Ibadullaev M., Tovbaev A.N. Research of ferroresonance oscillations at the frequency of sub-harmonics in three-phase non-linear electric circuits and systems. Rudenko International Conference on Methodological Problems in Reliability Study of Large Energy Systems (RSES 2020), Kazan, 21–26 September 2020. E3S Web of Conferences, 2020, vol. 216.

8. Korn G., Korn T. Mathematical handbook for scientists and engineers. Moscow, Nauka, 1984, p. 520. (In Russ.)

9. Maslennikov V.A., Ustinov S.M. Low-frequency system oscillations and stability of interconnected power systems. Energetika, Moscow, 2001, no. 4, pp. 69–75. (In Russ.)

10. Bessonov L.A. Theoretical foundations of electrical engineering. Electric circuits. 11th ed. Moscow, Gardariki, 2007. 701 p. (In Russ.)

11. Ivashev V.I. Oscillations in nonlinear electrical systems. Tashkent, Fan, 1967. 171 p. (In Russ.)